Phys. Math. P. 797

Mathesis. Analysis finitorum et infinitorum in genere 353.

In. 5135a

R

Abhandlung

über

eine neue Methode zu integriren,

von

Johann Freyherrn von Paccassi,

der kaiserl. Gesellschaft der Wissenschaften zu St. Petersburg, und anderer Akademien korrespondirendem Mitglied.

Wien,

gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1785.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Ich bin meinen Lesern Rechenschaft eines Unternehmens schuldig, das bey dem hohen Grade der Vollkommenheit, dessen die Mathematik sich billig rühmen kann, als ein unüberleg=

ter, oder wenigstens mißlungener Versuch von vielen könnte angesehen werden. Da ich aber überzeugt bin, daß billige Leser ihr Urtheil so lange aufschieben, bis sie das ganze Werk mit Aufmerksamkeit durchgelesen haben, so schmeichle ich mir, daß selbes für mich nie ungünstig ausfallen wird, besonders wenn man bedenket, daß wichtige Erfindungen den höchsten Grad der Vollkommenheit von ihrem Erfinder nie bey ihrem Anfange erhalten haben.

Unter die Hauptursachen, warum so viele von Erlernung der höhern Mathematik abgeschrecket werden, rechne ich billig die großen Schwierigkeiten, welche auch dem geübten Geometer in der Integralrechnung aufstossen, und die nur zu gewiß dem Anfänger alle

Lust benehmen, sich weiter in diese Wissenschaft ein= zulassen. Wer es jemals versucht hat, ein etwas zusammengesetztes Differenzial, auch nur vom ersten Grade, zu integriren, der wird erfahren haben, wie viele vergebene Versuche er auf Geradewohl machen muste, um jene Substituzion zu errathen, die seine Formel zum integriren tauglich machte: ich will von den Differenzialen höherer Grade gar nichts sagen, die öfters eine mehr als menschliche Geduld, und ei= nen nicht gemeinen Scharfsinn erfodern, um sie nur dahin zu bringen, daß man ein **bedingtes** Integra= le anzugeben vermag.

Diese Hindernisse haben auch in die Anwen= dung der Mathematik auf andere Wissenschaften einen

beträchtlichen Einfluß, da viele Aufgaben der Mechanik, Astronomie und Hydraulik sich auflösen liessen, wenn man die Gleichungen auf welche sie führen, integriren könnte, und nicht selten erfodert es weniger Mühe, die schwereste Aufgabe auf eine Formel zu bringen, als das Integrale dieser Formel oder Gleichung zu bestimmen.

Es haben zwar die grösten Geometer sich Mühe gegeben, einen Theil dieser Schwierigkeiten zu heben, und durch Auseinandersetzung vieler Fälle, und durch Regeln für jeden besondern Fall, die Integralrechnung den Anfängern faßlicher zu machen; aber da der Ausnahmen sowohl als der Regeln für jeden besondern Fall so viele sind, daß ein angehender Geo-

meter sie nicht alle in seinem Gedächtniß behalten kann, und es oft unendliche Arbeit erfodert, bis man zu beurtheilen vermag, zu welcher Regel ein gegebenes Differenziale gehöret; so schienen mir die bisherigen Bemühungen der Geometer immer sehr lobenswürdig zu seyn, aber zur Ermunterung junger Anfänger wenig beyzutragen.

Ein Zufall machte mich auf eine Stelle in Bernoullis Werken aufmerksam, wo er mit wenig Worten erinnert, **man könne in einigen Fällen das Integrale durch Aufsuchen der dritten Proporzional finden**; und ob ich gleich sah, daß diese Regel nur in wenig Fällen statt findet, auch Bernoulli nicht viel darauf hält, so gab mir dieses doch

Gelegenheit die Sache reifer zu überlegen, und so kam ich unvermerkt auf meine allgemeine Regel.

Kaum hatte ich sie einigen Geometern durch Briefe bekannt gemacht, als sie einhellig mich versicherten, daß meine Methode nicht weit auslangen würde, und daß ich, um so etwas zu erfinden, einen ganz andern Weg gehen müßte. Als aber in des berühmten Hrn. Lamberts Briefwechsel Seite 366. rc. meine Briefe allgemein bekannt wurden, schrieben mir einige ihren Beyfall, die meisten aber mißbilligten, daß ich meine Regel für allgemein ausgebe.

Es ist mir gleichgültig, wie man sie zu nennen beliebt, wenn es mir nur gelungen ist, eine

Regel

Regel erfunden zu haben, die keine Ausnahme leidet, und deren Vorschrift so einfach ist, daß jeder Anfänger sie einsehen und nach selber arbeiten kann. Das Lob einer Erfindung, oder die gelehrte Unsterblichkeit reizen mich im geringsten nicht, und ich werde mit wahrem Vergnügen meinen Irrthum erkennen, wenn man mich dessen zu überführen vermag.

Daß ich endlich keinen Beweis von meiner Regel beygefüget habe, ist in der Absicht geschehen, damit die Liebhaber durch Aufsuchung desselben in Stand gesetzt werden, die Sache gründlich zu prüfen, und vielleicht auf diesem Weg etwas wichtigeres zu erfinden.

Vorrede.

Es bleibt mir nichts übrig, als nun hinter das Gemählde zu treten, und den Ausspruch der Geometer zu erwarten.

Geschrieben, Wien den 1sten Christmonats.

---

§. 1.

§. 1.

Als ich vor einiger Zeit eine Abhandlung über meine neue Methode zu **integriren** bekannt machte, war ich weit entfernet meine Erfindung als etwas anzupreisen, wodurch die bisher bekannten Methoden unbrauchbar gemacht würden; oder als einen Gegenstand, der die Aufmerksamkeit der Geometer vorzüglich verdienen sollte. — Es geschah aber wider meine Erwartung das Gegentheil, da fremde Mathematiker mich mit Briefen beehrten, in welchen sie mir theils ihre Zweifel über meine Methode eröfneten, theils eine nähere Erklärung über Beyspiele verlangten, die meiner Regel nicht unterworfen zu seyn schienen.

§. 2.

§. 2.

Der kürzeste Weg diesen verehrungswürdigen Männern zu willfahren, und auch jenen Genüge zu leisten, welche aus Neugierde, oder aus Liebe zu den Wissenschaften meine Erfindung genauer zu kennen wünschten, schien mir zu seyn, wenn ich eine Abhandlung über diesen Gegenstand allgemein bekannt machte, in welcher ich dem Leser aufrichtig anzeigte, worinnen meine Erfindung besteht, und wie weit ich damit gekommen bin, um jeden in Stand zu setzen, über den Werth oder Unwerth ein Urtheil zu fällen; glücklich wenn es nach Wunsch ausfällt, aber immer mit dem Bewußtseyn zufrieden, daß in magnis & voluisse sat est.

§. 3.

Als ich die Werke des berühmten Leibnitz las, ward ich durch eine Stelle aufmerksam gemacht, in welcher er die Uebereinstimmung der Potenzen des Binomium $x + y$ mit den Differenzen des Produktes xy betrachtet. (Leibnitii Opera Tom. II, pag. 421; und Acta Eruditor. Anno 1721. pag. 200.) Noch mehr erstaunte ich, als ich in dem Commercio Epistolico Leibnitii & Joann. Bernoulli Tom. I. Epist. X. und XI. pag. 46 — 52. auf die Stelle kam, wo Johann Bernoulli zeigt, wie man in einigen Fällen das Integrale

finden kann, **wenn man die gegebene Formel quadrirt, und durch ihr zweytes Differenziale theilet:** Mehr brauchte ich nicht, um die ganze Sache ernstlich zu untersuchen, besonders weil Bernoulli schrieb, **daß ein grosses Geheimniß hierunter verborgen sey,** welches zu ergründen er nicht Musse genug habe. Ich fieng also mit Bernoullis Regel an, und fand bald, daß sie nicht allgemein richtig, und in den meisten Fällen mangelhaft sey, weil er selbst erinnert, man müsse ddx, und dx^2 nicht mit einander vermengen, welches doch unumgänglich nothwendig ist, wenn seine Regel einen Sinn haben soll. Da ich sowohl Leibnitzens als Bernoullis Gedanken im Anhange mittheilen werde, so überlasse ich es dem Leser, zu urtheilen, ob die Beschuldigung wahr sey, **daß ich meine Erfindung beeden grossen Männern abgeborgt habe.**

§. 4.

Bevor ich aber meine Regel vortrage, muß ich einen Satz vorausschicken, dessen Beweis in allen mathematischen Büchern zu finden ist, nämlich: **das zweyte Differenziale einer Größe ist die dritte Proportional zu der Größe selbst, und zu dem ersten Differenzial,** oder $x : dx = dx : ddx$.

Aus diesem sehr wichtigen Saß folgen nachstehende Gleichungen:

$$ddx = \frac{dx^2}{x}$$

$$d^3x = \frac{dx^3}{x^2}$$

$$d^4x = \frac{dx^4}{x^3}$$

$$d^5x = \frac{dx^5}{x^4}$$

$$d^nx = \frac{dx^n}{x^{n-1}}$$

§. 5.

Nach dieser Voraussetzung lautet die allgemeine Regel also: **Man mache aus dem gegebenen Differenziale einen Bruch, dessen Zähler das Quadrat des gegebenen Differenzials, der Nenner aber ihr zweytes Differenziale seye, so wird der Quotient das gesuchte Integrale seyn; man muß aber nie vergessen die vorhin §. 4. angegebenen Werthe der höheren Differenzen gehörig zu substituiren.**

§. 6.

§. 6.

Nun wollen wir diese Regel auf Beyspiele anwenden, und zwar erstlich auf solche, wo nur eine veränderliche Größe vorkömmt.

Aufgabe I.

Man verlangt die Integralien von dx, 2xdx; $3x^5dx$; $mx^{m-1}dx$.

Auflösung.

Nach der Regel §. 5. werde dx quadrirt, so ist dx^2 der Zähler, und das zweyte Differenziale von dx, oder ddx der Nenner des Bruches; folglich $\int dx = \frac{dx^2}{ddx}$; es ist aber nach §. 4. $dx^2 = xddx$, substituirt man dieses, so ist das gesuchte Integrale $\frac{xddx}{ddx} = x$.

II. $\int 2xdx = \frac{4x^2dx^2}{2xddx+2dx^2}$; weil aber nach §. 4. $xddx = dx^2$; so ist $\int 2xdx = \frac{4x^2dx^2}{2dx^2+2dx^2} = \frac{4x^2dx^2}{4dx^2} = x^2$

III. $\int 3x^5dx = \frac{9x^{10}dx^2}{3x^5ddx + 15x^4dx^2}$, oder weil nach §. 4. $x^5ddx = x^4dx^2$; so ist $\int 3x^5dx = \frac{9x^{10}dx^2}{18x^4dx^2} = \frac{1}{2}x^6$.

IV. $\int mx^{m-1}dx = \frac{m^2x^{2m-2}dx^2}{mx^{m-1}ddx + m.m-1x^{m-2}dx^2}$; es ist aber §. 4. $x^{m-1}ddx = x^{m-2}dx^2$ also $\int mx^{m-1}dx =$

$$\frac{m^2x^{2m-2}dx^2}{mx^{m-2}dx^2 + m.m-1x^{m-2}dx^2} = \frac{m^2x^{2m-2}}{m^2x^{m-2}} = x^m.$$

§. 7.

Nun wollen wir jene Fälle vornehmen, wo das Differenziale mit Wurzelgrößen verbunden ist.

Aufgabe 2.

Man verlangt das Integrale von $\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Auflösung.

Das gesuchte Integrale ist nach §. 5. $\left(\frac{x^2dx^2}{(a^2+x^2)}\right)$

$$\frac{\frac{(xddx+dx^2)\sqrt{a^2+x^2}-x^2dx^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{(a^2+x^2)} = \frac{x^2dx^2\sqrt{a^2+x^2}}{(a^2+x^2)(xddx+dx^2)-x^2dx^2}$$

nun

nun ist aber §. 4. $dx^2 = xddx$, folglich das gesuchte Integrale:

$$\frac{x^2ddx\sqrt{a^2+x^2}}{2a^2ddx+2x^2ddx-x^2ddx} = \frac{x^2ddx\sqrt{a^2+x^2}}{x^2ddx} = \sqrt{a^2+x^2}.$$

Anmerkung.

Man muß wohl Acht haben, ob eine unveränderliche Grösse, wie hier $2a^2$, mit dem Differenziale einer veränderlichen Grösse multiplizirt, oder durch selbes getheilet ist, in welchem Fall das ganze Produkt $2a^2ddx$ muß weggelassen werden.

Aufgabe 3.

Man verlangt das Integrale von $\frac{a^2dx}{x\sqrt{ax+x^2}}$.

Auflösung.

Das Integrale ist: $\left(\frac{a^4dx^2}{x^2(ax+x^2)}\right)$:

$$\frac{a^2ddx\sqrt{ax^3+x^4} - \frac{a^2dx(3ax^2dx+4x^3dx)}{2\sqrt{ax^3+x^4}}}{x^2(ax+x^2)}$$

 oder

oder nach §. 4. weil $dx^2 = xddx$, so ist das gesuchte Integrale:

$$\left(\frac{a^4dx^2}{x^2(ax+x^2)}\right)\times\frac{2\sqrt{ax^3+x^4}\,(x^2(ax+x^2))}{4a^2ddx(ax^3+x^4)-a^2xddx(3ax^2+4x^3)}$$

$$=\frac{2a^4x^2\sqrt{ax+x^2}}{4a^3x^3+4a^2x^4-(3a^3x^3+4a^2x^4)}=\frac{-2a\sqrt{ax+x^2}}{x.}$$

Aufgabe 4.

Man verlangt das Integrale von $dx\sqrt{x}$.

Auflösung.

Nach §. 5. ist das Integrale $\dfrac{dx^2\sqrt{x}\sqrt{x}}{\dfrac{2ddx\sqrt{x}+dx^2(x^{-\frac{1}{2}})}{2.}}$

$$=\frac{2dx^2\sqrt{x}}{2ddx+\dfrac{dx^2}{x}}, \text{ oder nach §.4.} = \frac{2xddx\sqrt{x}}{\dfrac{2xddx+xddx}{x}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}.$$

Aufgabe 5.

Man verlangt das Integrale von $x^2dx(f+gx^3)^m$.

Auflösung.

Das Integrale wird nach §. 5. also ausgedrückt:

$$\frac{x^4dx^2(f+gx^3)^{2m}}{(x^2ddx+2xdx^2)(f+gx^3)^m+x^2dx(3gmx^2dx)(f+gx^3)^{m-1}} =$$

$$\frac{x^4dx^2(f+gx^3)^{2m+1}}{(x^2ddx+2xdx^2)(f+gx^3)^{m+1}+3gmx^4dx^2(f+gx^3)^m},$$ oder

nach §. 4. $= \frac{(f+gx^3)^{m+1}}{(m+1)3g}$.

Aufgabe 6.

Man verlangt das Integrale von $\frac{3z^3dz(z^3-a^2)}{2}$.

Auflösung.

Weil $\frac{3z^3dz(z^3-a^2)}{2} = \frac{3z^6dz}{2} - \frac{3a^2z^3dz}{2}$, so ist das Integrale des ersten Gliedes nach §. 5. $= \frac{yz^{12}dz^2}{6z^6ddz+36z^5dz^2}$ oder nach §. 4. $= \frac{9z^{13}ddz}{42z^6ddz} = \frac{3}{14}z^7$.

Das Integrale des zweyten Gliedes ist ebenfalls nach §. 5.

$$= \frac{-9a^4z^6dz^2}{6a^2z^3ddz - 18a^2z^2dz^2}, \text{ oder nach §. 4.} = -\tfrac{3}{8}a^2z^4,$$

also das ganze Integrale $= \frac{3}{14}z^7 - \frac{3}{8}a^2z^4$.

Aufgabe 7.

Man verlangt das Integrale von $dx(a+bx)^p$.

Auflösung.

Nach unserer Regel §. 5. ist das gesuchte Integrale:

$$\frac{dx^2(a+bx)^{2p}}{ddx(a+bx)^p + pbdx^2(a+bx)^{p-1}}, \text{ oder nach §. 4.} =$$

$$\frac{xddx(a+bx)^{p+1}}{ddx(a+bx) + pbxddx} = \frac{(a+bx)^{p+1}}{(1+p)^b}.$$

Aufgabe 8.

Man verlangt das Integrale von $\frac{adx}{2\sqrt{ax}}$.

Auflösung.

Das Integrale ist nach §. 5. $= \left(\frac{a^2dx^2}{4(ax)}\right) : \frac{2a^2xddx - a^2dx^2}{4ax\sqrt{ax}}$, oder nach §. 4. $= \sqrt{ax}$.

Anmerkung.

Aus angeführten Beyspielen wird man bemerken, daß wir manchmal ddx durch $\frac{dx^2}{x}$, und auch oft $\frac{dx^2}{x}$ durch ddx ausgedrückt haben. Wenn das erste oder das zweyte vorzunehmen ist, dieses beruhet auf der Einsicht des Geometers, welcher gleich beym ersten Anblick sehen kann, welche aus beyden Substitutionen die Berechnung mehr abkürzet, denn im Grunde liegt nichts daran, man mag wählen welche man will.

§. 8.

Bisher haben wir nur jene Fälle zu Beyspielen gewählet, in welchen eine einzige veränderliche Größe zugegen ist, und das Integral sich algebraisch ausdrücken läßt. Es geschiehet aber sehr oft, daß logarithmische, oder Exponential-

größen vorhanden sind, wir wollen also zeigen, wie unsere Methode in diesen Fällen zu gebrauchen ist.

§. 9.

Wenn zum Beyspiel $\frac{dx}{x}$ gegeben ist, dessen Integrale man verlanget, und wir wollten nach §. 5. verfahren, so bekämen wir $\left(\frac{dx^2}{x^2}\right) : \frac{xddx - dx^2}{x^2}$, oder nach §. 4. $= \frac{dx^2}{dx^2 - dx^2} = 0$; da also kein Integrale herauskömmt, so ist dieses ein Zeichen, daß das gegebene Differenziale kein algebraisches Integrale habe woraus denn abermal die zwote wichtige Regel fliesset: **Wenn ein nach meiner Methode behandeltes Differenziale kein endliches Integrale giebt, so ist dieses ein Zeichen, daß es auch keines hat.** Wir wollen hievon einige Beyspiele geben.

Aufgabe 9.

Man verlangt das Integrale von $\frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Auf-

Auflösung.

Nach §. 5. ist das Integrale $\left(\frac{a^2 dx^2}{(a^2 - x^2)}\right)$:

$\frac{addx(a^2-x^2)+axdx^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$, oder nach §. 4. $= \frac{a^2dx^2\sqrt{a^2-x^2}}{-axdx^2+axdx^2}$

$= \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{0}$, welches anzeigt, daß das Integrale nicht algebraisch kann ausgedrückt werden; denn es stellet einen Zirkelbogen vor.

Aufgabe 10.

Man verlangt das Integrale von $\frac{cdx}{x^2+ax-b^2}$.

Auflösung.

Nach §. 5. wäre das Integrale $\frac{c^2dx^2}{cx^2ddx+caxddx-2cxdx^2-acdx^2}$, oder nach §. 4. $\frac{c^2dx^2}{-cxdx^2} = \frac{-c}{x}$; es giebt also von diesem rationellen Bruch kein algebraisches Integrale.

Aufgabe II.

Man verlangt das Integrale von $\frac{-dx}{\sqrt{x+1}}$.

Auflösung.

Nach §. 5. wäre das Integrale $\left(\frac{dx^2}{(x+1)}\right)$:

$$\frac{\frac{-ddx\sqrt{x+1}+dx^2}{2\sqrt{x+1}}}{(x+1)},$$ oder nach §. 4. $= \frac{+dx^2}{-2dx^2+dx^2} =$

$-\frac{1}{2}$; folglich giebt es auch für diese Formel kein endliches Integrale.

§. 10.

Obgleich meine Regel für jene Fälle nicht brauchbar zu seyn scheinet, welche kein algebraisches Integrale haben, so läßt selbe dennoch mit großem Vortheil anwenden, wie folgende Beyspiele zeigen.

Auf-

Aufgabe 12.

Man verlangt das Integrale von $\frac{2xdx}{a^2 + x^2}$.

Auflösung.

Behandelt man es nach §. 5. und §. 4., so wäre das Integrale $= \frac{4x^2dx^2}{4a^2dx^2 + 4x^2dx^2 - 4x^2dx^2} = \frac{x^2}{a^2}$, welches anzeigt, daß dieses Differenziale kein algebraisches Integrale hat. Ich setze also $\log(a^2 + x^2) = z$, so ist $\frac{2xdx}{a^2+x^2} = dz$, und $\int\frac{2xdx}{(a^2+x^2)} = \int dz = \frac{dz^2}{ddz} = \frac{zddz}{ddz}$ nach §. 5. und §. 4. $= z$, also das Integrale $= \log(a^2 + x^2)$.

Aufgabe 13.

Man verlangt das Integrale von $\frac{adx - 2xdx}{ax - x^2}$.

Auflösung.

Weil obige Regel §. 5. kein Integrale giebt, so setze ich $\log.(ax-x^2)=z$; folglich $\frac{adx-2xdx}{ax-x^2}=dz$; und das Integrale ist sodann: $\log.(ax-x^2)$.

Aufgabe 14.

Man verlangt die Integralien von $a^x dx \log a$; und von $x^x dx \log x + x^x dx$.

Auflösung.

Da nach meiner Methode §. 4. und §. 5. kein Integrale gefunden wird, so setze ich $\log a^x = x\log a = z$, folglich $dx\log a = dz$, und $a^x dx\log a = a^x dz$. Wird dieses nun nach §. 5. behandelt, so ist das Quadrat $a^{2x}dz^2$, und das doppelte Differenzial ist: $a^x dz^2$, folglich das gesuchte Integrale $\frac{a^{2x}dz^2}{a^x dz^2} = a^x$.

Um das Integrale der zweyten Formel zu finden, setze ich $\log x^x = z$, so ist $dx \log x + dx = dz$, und die Formel $x^x dx \log x + x^x dx$ wird $= x^x dz$. Hieraus nun ist nach §. 5. das Integrale $\frac{x^{2x} dz^2}{x^x dz^2} = x^x$.

Aufgabe 15.

Es sind folgende drey Formeln gegeben [I.] $\frac{dx}{x \log x}$, [II.] $\frac{ndx}{x \log x^n}$; [III.] $\frac{ndx}{x \log x}$, man sucht ihr Integrale.

Auflösung.

Ich setze für die erste Formel $\log x = y$, so ist $\frac{dx}{x \log x} = \frac{dy}{y}$; ferners sey $\log y = z$, so ist das Integrale nach §. 5. $= \frac{dz^2}{ddz} = \frac{\frac{dx^2}{(x \log x)}}{d\left(\frac{dx}{x \log x}\right)}$, nach §. 4. $= \frac{zddz}{ddz} =$ $\log. y = \log.(\log x)$.

Für

Für [II.] setze ich $\log x^n = y^n$, so ist $\frac{ndx}{x\log x^n} = \frac{ndy}{y}$;

ferners sey $\int\frac{ndy}{y} = z$, so ist das Integrale nach §. 5. =

$$\frac{\left(\frac{ndx}{x\log x^n}\right)^2}{d.\left(\frac{ndx}{x\log x^n}\right)} = \frac{zddz}{ddz}\text{, nach §. 4.} = z = \log(\log x^n).$$

Endlich für [III.] setze ich $\log x = y$; und $\frac{ndy}{y} = z$,

so ist das Integrale nach §. 5. $= \frac{\left(\frac{ndx}{x\log x}\right)^2}{d.\frac{ndx}{x\log x}} = \frac{dz^2}{ddz}$,

oder nach §. 4. $= z = \log(\log x)^n$.

Anmerkung.

Die hier gebrauchten Substitutionen sind nicht auf alle Fälle gleich anwendbar, und es kömmt hier auf die Einsicht des Geometers an, auf welche Art er die Formel behandeln will, um das Integrale am leichtesten zu finden.

§. 11.

Wir wollen nun sehen, ob meine Methode auch in jenen Fällen zu gebrauchen ist, wenn eine Differenzialformel mehr veränderliche Größen enthält; und da auch hier keine andere Regel (als nach §. 4. und §. 5.) erfodert wird, so wollen wir selbe alsogleich auf Beyspiele anwenden.

Aufgabe 16.

Man verlangt das Integrale von $ydx + xdy$.

Auflösung.

Wenn man nach der Vorschrift des §. 5. verfährt, so ist das Integrale $= \frac{y^2dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2}{yddx + 2dydx + xddy}$, oder nach §. 4. weil $dx^2 = xddx$, und $dy^2 = yddy$, so wird das Integrale

$$= \frac{y^2xddx + 2xydxdy + x^2yddy}{yddx + 2dydx + xddy} = xy.$$

Anmerkung.

Es läßt sich auch das Integrale eben so leicht finden, wenn man mit jedem Theil besonders nach §. 4. und §. 5. verfährt; denn man würde finden: $\int ydx = \frac{y^2dx^2}{yddx+dxdy}$ $= \frac{xy^2dx}{ydx+xdy}$, und $\int ydx = \frac{x^2dy^2}{xddy+dxdy} = \frac{yx^2dy}{ydx+xdy}$, folglich das ganze Integrale $= \frac{yx^2dy+xy^2dx}{ydx+xdy} = xy$.

Aufgabe 17.

Man verlangt das Integrale von $mx^{m-1}y^ndx+nx^my^{n-1}dy$.

Auflösung.

Nach §. 5. ist das Integrale $=$

$$\frac{m^2x^{2m-1}y^{2n}ddx+2mnx^{2m-1}y^{2n-1}dxdy+n^2x^{2m}y^{m-1}ddy}{m^2x^{m-1}y^nddx+2nmx^{m-1}y^{n-1}dxdy+n^2y^{n-1}x^mddy},$$

oder nach §. 4. $= x^my^n$.

Auf-

Aufgabe 18.

Man verlangt das Integrale von $\frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Auflösung.

Nach §. 5. ist das Integrale $= \left(\frac{y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2}{y^4}\right)$:

$\left(\frac{y^3ddx - xy^2ddy - 2y^2dxdy + 2xydy^2}{y^4}\right)$ oder nach §. 4.

$$= \frac{x(y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2)}{y(y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2)} = \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 19.

Man verlangt das Integrale von $dx\sqrt{y} + \frac{xdy}{2\sqrt{y}}$

$- ady\sqrt[3]{x} - \frac{aydx}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Auflösung.

Weil die Rechnung zu weitläufig würde, wenn man alle vier Glieder der Formel zugleich quadriren, und durch das zweyte Differenzial nach §. 5. theilen wollte, so verfahre man wie in der 6ten und 16ten Aufgabe, und nehme jedes Glied besonders.

Es ist also das Integrale von $dx\sqrt{y} = \dfrac{ydx^2}{ddx\sqrt{y} + \dfrac{dxdy}{2\sqrt{y}}}$

oder nach §. 4. $= \dfrac{2xydx\sqrt{y}}{2ydx+xdy}$.

Das Integrale von $\dfrac{xdy}{2\sqrt{y}}$ ist nach §. 5. =

$$\left(\frac{x^2dy^2}{4y}\right) : \frac{2\sqrt{y}(xddy+dxdy) - \dfrac{xdy^2}{\sqrt{y}}}{4y}$$; oder nach §. 4. =

$$\frac{x^2dy\sqrt{y}}{2ydx+xdy}.$$

Das Integrale von $-ady\sqrt[3]{x}$ ist $= \dfrac{a^2dy^2\sqrt[3]{x^2}}{-addy\sqrt[3]{x} - \dfrac{adyx^{-\frac{2}{3}}dx}{3}}$

oder nach §. 4. $= \dfrac{-3aydy\sqrt[3]{x^4}}{3xdy+ydx}$.

End-

Endlich das Integrale von $\frac{-aydx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ist =

$$\frac{(a^2y^2dx^2)}{9\sqrt[3]{x^4}} : \frac{-3x^{\frac{2}{3}}(ayddx+adydx)+aydx(2x^{-\frac{1}{3}}dx)}{9x^{\frac{4}{3}}}$$ oder

nach §. 4. $= \frac{-ay^2x^{\frac{1}{3}}dx}{3xdy+ydx}$.

Es ist also das ganze Integrale:

$$\frac{(2ydx+xdy)x\sqrt{y}}{2ydx+xdy} - \frac{(3xdy+ydx)ay\sqrt[3]{x}}{(3xdy+ydx)} = x\sqrt{y} - ay\sqrt[3]{x}$$

Aufgabe 20.

Man verlangt das Integrale von:

$(3z^2+2bzy-3y^2)dz+(bz^2-6zy+3cy^2)dy.$

Auflösung.

Man suche hier ebenfalls das Integrale von jedem Theile besonders, so ist

Das Integrale von $3z^2dz = z^3$.

Das Integrale von 2bzydz ist $= \frac{4b^2z^2y^2dz^2}{4bydz^2 + 2bzdydz}$

$= \frac{2bz^2y^2dz}{2ydz + zdy}$.

Das Integrale von bz^2dy ist $\frac{b^2z^4dy^2}{bz^2ddy + 2bzdzdy} =$

$\frac{bz^3ydy}{2ydz + zdy}$. Es ist also das Integrale von $2bzydz + bz^2dy$

$= \frac{2bz^2y^2dz + bz^3ydy}{2ydz + zdy} = byz^2$.

Ferners ist ebenfalls nach §. 5. und §. 4. $\int - 3y^2dz =$

$\frac{9y^4dz^2}{-3y^2ddz - 6ydydz} = \frac{3y^3zdz}{-ydz - 2zdy}$; und endlich:

$\int - 6zydy = \frac{36z^2y^2dy^2}{-6zyddy - 6zdy^2 - 6ydydz} = \frac{6z^2ydy}{-2zdy - ydz}$

Folglich ist $\int - 3y^2dz - 6zydy = \frac{3y^3zdz + 6z^2ydy}{-ydz + 2zdy} =$

$- 3zy^2$.

Endlich $\int 3cy^2dy$ ist cy^3.

Es ist also das verlangte Integrale:

$$z^3 + byz^2 - 3zy^2 + cy^3 \mp C.$$

Auf-

Aufgabe 21.

Man verlangt das Integrale von $\frac{dx+dy}{2\sqrt{x+y}}$.

Auflösung.

Nach §. 5. ist das Integrale $\left(\frac{dx+dy}{4(x+y)}\right)^2$:

$$\left(\frac{2(d^2x+d^2y)\sqrt{x+y}-\frac{(dx+dy)^2}{\sqrt{x+y}}}{4(x+y)}\right)$$

$$=\frac{(dx+dy)^2.\sqrt{x+y}}{2(ddx+ddy)(x+y)-(dx+dy)^2};$$ oder nach §. 4. =

$$\frac{(dx+dy)^2\sqrt{x+y}}{\frac{(x+y)(dx+dy)^2}{(x+y)}-(dx+dy)^2}=\sqrt{x+y}.$$

Aufgabe 22.

Man verlangt das Integrale von:

$$x^3dy+3x^2ydx-\frac{dy}{2\sqrt{y}}+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}.$$

Auflösung.

Wenn man hier das Integrale von jedem Gliede besonders nach §. 5. und §. 4. sucht, so ist: $\int x^3 dy = \frac{x^6 dy^2}{x^3 ddy + 3x^2 dx dy}$, oder nach §. 4. $= \frac{x^4 y dy}{x dy + 3y dx}$, $\int 3x^2 y dx = \frac{9x^4 y^2 dx^2}{3x^2 y dx^2 + 3x^2 dx y d + 6xy dx^2} = \frac{3x^3 y^2 dx}{x dy + 3y dx}$ nach §. 4. Also beyde Glieder $\int x^3 dy + 3x^2 y dx = \frac{x^4 y dy + 3x^3 y^2 dx}{x dy + 3y dx} = x^3 y$. Ferners ist

$$\int \frac{-dy}{2\sqrt{y}} = \left(\frac{dy^4}{4y}\right) : \frac{-2ddy\sqrt{y} + \frac{2dy^2}{\sqrt{y}}}{4y} = -\sqrt{y}.$$

Endlich $\int \frac{2ydy}{x} = \left(\frac{4y^2 dy^2}{x^2}\right) : \frac{(2xyddy + 2xdy^2) - 2ydx dy}{x^2}$

$\frac{2y^2 dy}{2x dy - y dx}$;

$$\int -\frac{y^2 dx}{x^2} = \frac{(y^4 dx)}{x^4} : \frac{-x^2(y^2 ddx + 2ydydx) + 2xy^2 dx^2}{x^4},$$

oder nach §. 4. $= \frac{y^3 dx}{x(ydx - 2xdy)}$ folglich

∫

$$\int \frac{2ydy}{x} - \frac{y^2dx}{x^2} = \frac{2y^2dy}{2xdy - ydx} - \frac{y^3dx}{x(ydx - 2xdy)} = \frac{y^2}{x},$$

das Integrale ist also: $x^3y - \sqrt{y} + \frac{y^2}{x}$.

Aufgabe 23.

Man verlangt das Integrale von ydx.

Auflösung.

Nach §. 5. wird das Integrale $= \frac{y^2dx^2}{yddx + dxdy}$, oder nach §. 4. $= \frac{xy^2dx}{ydx + xdy}$. Da dieser Bruch sich nicht aufheben läßt, so hat vermöge §. 9. die gegebene Formel kein algebraisches Integrale. Man muß folglich zu einer unendlichen Reihe die Zuflucht nehmen, welche am leichtesten gefunden wird, wenn man den Zähler durch den Nenner theilet. Auf diese Art erhält man:

$$\int ydx = xy - \frac{x^2dy}{dx} + \frac{x^3ddy}{dx^2} - \text{ oder nach §. 4.}$$

$$\int ydx = xy - \frac{x^2dy}{dx} + \frac{x^3dy^2}{ydx^2} - \&c. \&c.$$

Aufgabe 24.

Man verlangt das Integrale von $2xdy + y^2dx$.

Auflösung.

Nach §. 5. und §. 4. wäre das Integrale:

$\frac{xy(2xdy + y^2dx)^2}{2x^2dy^2 + 2xydxdy + y^3dx^2 + 2xy^2dxdy}$, welches anzeigt, daß die Formel kein algebraisches Integrale habe.

§. 12.

Ich glaube hinlänglich erwiesen zu haben, daß meine Methode sich ohne Schwierigkeit auf die Differenzialen des ersten Grades anwenden läßt; nun will ich auch zeigen, daß sie auch bey höheren Graden ohne Ausnahme zu gebrauchen sey.

Auf-

Aufgabe 25.

Man verlangt das Integrale von ddx; $xddx + dx^2$.

Auflösung.

Nach §. 5. ist das Integrale $= \frac{(ddx)^2}{dddx}$; oder nach §. 4. $= \frac{(dx^4)}{x^2} : \frac{dx^3}{x^2} = dx$.

Eben so ist auch das Integrale der andern Formel nach §. 5. $= \frac{dx^4 + 2xdx^2ddx + x^2(ddx)^2}{3dxddx + xdddx}$, es ist aber nach §. 4. $2xdx^2ddx = 2dx^4$; ferners $x^2(ddx)^2 = dx^4$; wie auch $2dxddx = \frac{2dx^3}{x}$, und $dxddx = \frac{dx^3}{x}$; folglich ist das Integrale nach geschehener Substitution $= \frac{x(4dx^4)}{4dx^3} = xdx$.

Aufgabe 26.

Man verlangt das Integrale von:

$nx^{n-1}ddx + n(n-1).x^{n-2}dx^2$.

Auflösung.

Wenn man hier das Integrale von jedem Gliede besonders nach §. 5. und §. 4. sucht, so ist: $\int x^3dy =$

$$\frac{x^6dy^2}{x^3ddy + 3x^2dxdy},$$ oder nach §. 4. $$= \frac{x^4ydy}{xdy + 3ydx},$$

$$\int 3x^2ydx = \frac{9x^4y^2dx^2}{3x^2ydx^2 + 3x^2dxyd + 6xydx^2} =$$

$\frac{3x^3y^2dx}{xdy+3ydx}$ nach §. 4. Also beyde Glieder $\int x^3dy +$

$$3x^2ydx = \frac{x^4ydy + 3x^3y^2dx}{xdy + 3ydx} = x^3y.$$ Ferners ist

$$\int \frac{-dy}{2\sqrt{y}} = \left(\frac{dy^4}{4y}\right) : \frac{-2ddy\sqrt{y} + \frac{2dy^2}{\sqrt{y}}}{4y} = -\sqrt{y}.$$

Endlich $$\int \frac{2ydy}{x} = \left(\frac{4y^2dy^2}{x^2}\right) : \frac{(2xyddy+2xdy^2)-2ydxdy}{x^2}$$

$$\frac{2y^2dy}{2xdy-ydx};$$

$$\int \frac{y^2dx}{x^2} = \frac{(y^4dx)}{x^4} : \frac{-x^2(y^2ddx+2ydydx)+2xy^2dx^2}{x^4},$$

oder nach §. 4. $= \frac{y^3dx}{x(ydx-2xdy)}$ folglich

∫

$$\int \frac{2ydy}{x} - \frac{y^2dx}{x^2} = \frac{2y^2dy}{2xdy-ydx} - \frac{y^3dx}{x(ydx-2xdy)} = \frac{y^2}{x},$$

das Integrale ist also: $x^3y - \sqrt{y} + \frac{y^2}{x}$.

Aufgabe 23.

Man verlangt das Integrale von ydx.

Auflösung.

Nach §. 5. wird das Integrale $= \frac{y^2dx^2}{yddx+dxdy}$, oder nach §. 4. $= \frac{xy^2dx}{ydx+xdy}$. Da dieser Bruch sich nicht aufheben läßt, so hat vermöge §. 9. die gegebene Formel kein algebraisches Integrale. Man muß folglich zu einer unendlichen Reihe die Zuflucht nehmen, welche am leichtesten gefunden wird, wenn man den Zähler durch den Nenner theilet. Auf diese Art erhält man:

$\int ydx = xy - \frac{x^2dy}{dx} + \frac{x^3ddy}{dx^2} -$ oder nach §. 4.

$\int ydx = xy - \frac{x^2dy}{dx} + \frac{x^3dy^2}{ydx^2} -$ &c. &c.

Aufgabe 24.

Man verlangt das Integrale von $2xdy + y^2dx$.

Auflösung.

Nach §. 5. und §. 4. wäre das Integrale:

$$\frac{xy(2xdy + y^2dx)^2}{2x^2dy^2 + 2xydxdy + y^3dx^2 + 2xy^2dxdy},$$ welches anzeigt, daß die Formel kein algebraisches Integrale habe.

§. 12.

Ich glaube hinlänglich erwiesen zu haben, daß meine Methode sich ohne Schwierigkeit auf die Differenzialen des ersten Grades anwenden läßt; nun will ich auch zeigen, daß sie auch bey höheren Graden ohne Ausnahme zu gebrauchen sey.

Auf-

Aufgabe 25.

Man verlangt das Integrale von $ddx;\ xddx + dx^2$.

Auflösung.

Nach §. 5. ist das Integrale $= \frac{(ddx)^2}{dddx}$; oder nach §. 4.

$$= \frac{(dx^4)}{x^2} : \frac{dx^3}{x^2} = dx.$$

Eben so ist auch das Integrale der andern Formel nach §. 5. $= \frac{dx^4 + 2xdx^2ddx + x^2(ddx)^2}{3dxddx + xdddx}$, es ist aber nach §. 4. $2xdx^2ddx = 2dx^4$; ferners $x^2(ddx)^2 = dx^4$; wie auch $2dxddx = \frac{2dx^3}{x}$, und $dxddx = \frac{dx^3}{x}$; folglich ist das Integrale nach geschehener Substitution $= \frac{x(4dx^4)}{4dx^3} = xdx$.

Aufgabe 26.

Man verlangt das Integrale von:

$$nx^{n-1}ddx + n(n-1).x^{n-2}dx^2.$$

Auflösung.

Wir wollen, um die Rechnung abzukürzen, das Integrale von jedem Glied dieser Formel besonders suchen, und es wird nach §. 5.

$$\int nx^{n-1}ddx = \frac{n^2x^{2n-2}ddx}{nx^{n-1}dddx + n \,.\, n-1x^{n-2}dxddx}$$, oder nach §. 4. $$= \left(\frac{n^2x^{2n-2}dx^4}{x^2}\right) : \frac{nx^ndx^3 + n.n-1x^ndx^3}{x^3} = x^{n-1}dx.$$

Ferners ist:

$$\int n.(n-1)x^{n-2}dx^2 = \frac{n^2(n-1)(n-1)x^{2n-4}dx^4}{2n.(n-1)x^{n-2}dxddx + n.(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3}$$

oder nach §. 4. $$= \left(\frac{n^2.(n-1)(n-1)x^{2n}dx^4}{x^4}\right) : \frac{n^2(n-1)x^ndx^3}{x^3} = (n-1)x^{n-1}dx.$$ Also das gesuchte Integrale $= x^{n-1}dx + (n-1)x^{n-1}dx = nx^{n-1}dx.$

Aufgabe 27.

Man verlangt das Integrale von $ddx\sqrt{x} + \frac{dx^2}{2\sqrt{x}}$.

Auf-

Auflösung.

Das Integrale des ersten Theils ist nach §. 5.

$$\int ddx\sqrt{x} = \left(\frac{xddx^{3}}{d^{3}x\sqrt{x}+\frac{dxddx}{2\sqrt{x}}}\right) : d^{3}x\sqrt{x} + \frac{ddxdx}{2\sqrt{x}},$$

oder nach §. 4. $= \left(\frac{dx^{4}}{x}\right) : \frac{3dx^{3}}{2x\sqrt{x}} = \frac{2}{3}dx\sqrt{x}.$

Eben so ist auch:

$$\int \frac{dx^{2}}{2\sqrt{x}} = \left(\frac{dx^{4}}{4x}\right) : \frac{4dxddx\sqrt{x} - \frac{dx^{3}}{\sqrt{x}}}{4x},$$ oder nach §. 4.

$= \frac{dx^{4}.\sqrt{x}}{3dx^{3}} = \frac{1}{3}dx\sqrt{x}.$ Folglich wird das gesuchte Integrale $= dx\sqrt{x}.$

Aufgabe 28.

Man verlangt das Integrale von: $yddx + 2dxdy + xddy.$

Auflösung.

Bey Behandlung jener Differenzialien des zweyten Grades, welche mehr veränderliche Größen enthalten, ist keine besondere Anmerkung zu machen, indem sie nach der oben §. 5. und §. 4. gegebenen Regel müssen integriret werden. Es ist also

$$\int yddx = \left(\frac{y^2dx^4}{x^2}\right) : \frac{dydx^2}{x} + \frac{ydx^3}{x^2}, \text{ oder nach §. 4.} = \frac{y^2dx^2}{xdy + ydx}.$$

$$\int 2dxdy = \frac{4dx^2dy^2}{2dxddy + 2dyddx}, \text{ oder nach §. 4.} = \frac{2xydxdy}{xdy + ydx}.$$ Endlich

$$\int xddy = \left(\frac{x^2dy^4}{y^2}\right) : \frac{xdy^3}{y^2} + \frac{dxdy^2}{y}, \text{ oder nach §. 4.} = \frac{x^2dy^2}{xdy + ydx}.$$ Es ist also das gesuchte Integrale:

$$\frac{y^2dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2}{xdy + ydx} = ydx + xdy.$$

§. 13.

§. 13.

Anmerkung.

Die Differenzialen des zweyten Grades, welche ein algebraisches Integral haben, lassen sich durch den binomischen Lehrsatz ohne Mühe integriren, welches bisher noch von niemand ist bemerket worden. Dieses zu zeigen, wollen wir das Beyspiel der vorigen Aufgabe nehmen:

Aufgabe 29.

Man verlangt das Integrale von $yddx + 2dxdy + xddy$ durch den binomischen Lehrsatz zu finden?

Auflösung.

Weil das Differenziale vom zweyten Grad ist, so wird

$P = yddx$; $Q = \frac{2dxdy}{yddx} = \frac{2xdy}{ydx}$, und $m = \frac{1}{2}$ seyn,

folg-

folglich ist $P^m = \int yddx = ydx = A$; $mAQ = \frac{1}{2} ydx \cdot \frac{2xdy}{ydx} = xdy$. Also das Integrale $ydx + xdy$.

Aufgabe 30.

Man verlangt das Integrale von:

$$6x^2dxdy + 6xydx^2 + x^3ddy.$$

Auflösung.

Wenn wir den binomischen Lehrsatz anwenden wollen, so ist:

$P = x^3ddy$; $Q = \frac{6x^2dxdy}{x^3ddy} = \frac{6ydx}{xdy}$; $m = \frac{1}{2}$. Folglich $P^m = x^3dy = A$.

$mAQ = \frac{1}{2}x^3dy \left(\frac{6ydx}{xdy}\right) = 3x^2ydx$. Also das Integrale $x^3dy + 3x^2ydx$; wo dx eine beständige Größe ist.

§. 14.

Anmerkung.

Wenn wir nach unserer Methode §. 5. und §. 4. die vorhergehende Aufgabe behandeln wollten, so würden wir das wahre Integrale zwar nicht finden; es ist aber dieses kein Beweis wider die allgemeine Richtigkeit der Regel, sondern ein Zeichen, daß die Differenzialen nicht vollständig sind, indem eine der veränderlichen Größen mangelt, und also ihr zweytes Differenziale abgehet. Wenn solche Fälle vorkommen, so kann man versuchen, das Integrale durch den binomischen Lehrsatz zu finden, und sollte auch dieses keines geben, so wäre es ein Zeichen, daß die Formel kein Integrale hat. Folgende Beyspiele werden die Sache mehr aufklären.

Aufgabe 31.

Man verlangt das Integrale von $xddy + 2dydx$.

Auf-

Auflösung.

Wenn man nach §. 5. und §. 4. verfährt, so ist das Integrale $\frac{x^2dy^4}{xdy+ydx} + 2ydxdy$. Da aber dieses nicht das Wahre ist, so versuche man den binomischen Lehrsatz, nach welchem $P = xddy$; $Q = \frac{2ydx}{xdy}$; $m = \frac{1}{2}$, und man findet:

$$P^m = xdy = A;$$

$$mAQ = xdy . \frac{(2ydx)}{xdy} = ydx,$$

folglich das gesuchte Integrale $xdy + ydx$.

Aufgabe 32.

Man verlangt das Integrale von $dx - \frac{ydxddy}{dy^2}$.

Auflösung.

Wenn wir diese Aufgabe nach unserer Methode §. 4. und §. 5. behandeln, so erhalten wir kein Integrale, welches anzeigt, daß die gegebene Formel ein unvollständiges Differenziale

le ist. Gebrauchen wir aber den binomischen Lehrsatz, so ist

$P = \frac{ydxddy}{dy^2}$; $Q = -1$, und $P^m = \frac{ydx}{dy}$, welches das gesuchte Integrale ist.

Aufgabe 33.

Man verlangt das Integrale von $\frac{yddx}{dy} + dx - \frac{ydxddy}{dy^2}$

Auflösung.

Nach unserer Methode §. 5. ist:

$$\int \frac{yddx}{dy} = \left(\frac{y^2ddx^2}{dy^2}\right) : \frac{dy(yd^3x + dyddx) - yd^2yd^2x}{dy^2}, \text{ oder}$$

nach §. 4. $= \frac{y^2dx^4}{ydydx^3} = \frac{ydx}{dy}$. Ferners ist

$\int dx = x$, und endlich $\int \frac{-ydxddy}{dy^2} = \left(\frac{y^2dx^2ddy^2}{dy^4}\right)$:

$$\frac{-dy^2(ydxd^3y + yd^2xd^2y + dydxd^2y) + 2ydydxddy^2}{dy^4}$$

oder

oder nach §. 4. $= - x$. Es ist also das gesuchte Integrale: $\frac{ydx}{dy} + x - x = \frac{ydx}{dy}$.

Aufgabe 34.

Man verlangt das Integrale von $yddx + dydx$.

Auflösung.

Nach Anleitung des §. 5. ist:

$\int yddx = \frac{y^2ddx^2}{ydx^3 + dyddx}$, oder nach §. 4. $=$

$\frac{y^2dx^4}{x^2\left(\frac{ydx^3}{x^2} + \frac{dy\,dx^2}{x}\right)} = \frac{y^2dx^2}{ydx + xdy}$. Ferners ist auch

$\int dydx = \frac{dy^2dx^2}{ddydx + ddxdy}$, oder nach §. 4. $=$

$$\frac{dy^2dx^2}{\frac{dxdy^2}{y} + \frac{dydx^2}{x}} = \frac{xydydx}{ydx + xdy}.$$ Es ist also das gesuchte

Integrale: $\frac{y^2dx^2 + xydydx}{ydx + xdy} = ydx.$

§. 15.

Anmerkung.

Die 32 und 33ste Aufgabe beweisen hinlänglich, wie leicht sich meine Methode auf jene Fälle anwenden läßt, wo vollständige Differenzialien vorkommen, und wie man sich verhalten müsse, wenn das Gegentheil gegeben würde. In folgenden Beyspielen wollen wir beede Fälle noch besser zu erklären suchen.

Aufgabe 35.

Man verlangt das Integrale von:

$$\frac{ddy}{x} - \frac{2dyxdy}{x^2} + \frac{2dydx^2}{z^3} - \frac{yddx}{x^2}.$$

Auflösung.

Wenn man, um langwierige Rechnungen zu vermeiden, den binomischen Lehrsatz anwendet, so ist $P = \frac{ddy}{x}$; $Q = \left(\frac{-2dxdy}{x^2}\right) : \frac{ddy}{x} = \frac{-2ydx}{xdy}$; $m = \frac{1}{2}$, folglich $P^m = \frac{dy}{x} = A$.

$mAQ = \frac{dy}{2x} \cdot \frac{(-2ydx)}{xdy} = \frac{-ydx}{x^2}$; also das gesuchte Integrale: $\frac{dy}{x} - \frac{ydx}{x^2}$.

Aufgabe 36.

Man verlangt das Integrale von $\frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{x^2} + \frac{2ydx^2}{x^3}$.

Auflösung.

Nach der Methode des §. 5. ist:

$\frac{ddy}{x} = \frac{ddy^2}{x^2}\Big) : \frac{xd^3y - dxddy}{x^2}$, oder nach §. 4. =

$\frac{dy^2}{xdy - ydx}$. Ferners,

$\int \frac{-2dxdy}{x^2} = \frac{4dx^2dy^2}{x^4}\Big) : -\frac{x^2(2dxddy + 2dyddx) + 4xdx^2dy}{x^4}$

oder nach §. 4. $= \frac{2ydxdy}{-(xdy - ydx)x}$. Endlich

$\int \frac{2ydx^2}{x^3} = \frac{4y^2dx^4}{x^6}\Big) : \frac{x^3(2dydx^2 + 4ydxddx) - 6yx^2dx^3}{x^6}$,

oder nach §. 4. $- \frac{2y^2dx^2}{(xdy - ydx)x^2}$.

Da aber dieses das wahre Integrale nicht ist, so versuche man den binomischen Lehrsatz, nach welchem $P = \frac{ddy}{x}$; $Q = -\frac{2dxdy}{x^2}$ und das Integrale ist sodann $\frac{dy}{x} - \frac{ydx}{x^2}$, wo aber dx = Const.

Aufgabe 37.

Man verlangt das Integrale von:

$ax^2yddx + 2ayxdx^2 + (ax^2 + 3b^2y^2x^2)dxdy + b^2x^3y^2ddy + 2b^2x^3ydy^2$.

Auflösung.

Nach dem binomischen Lehrsatz ist $P = ax^2yddx$; $Q = \frac{3b^2y^2x^2dx\,dy}{ax^2yddx}$, oder nach §. 4. $Q = \frac{3b^2yxdy}{adx}$; folglich: $P^m = ax^2ydx = A$.

$mAQ = \frac{1}{3}ax^2ydx \cdot \frac{3b^2yxdy}{adx} = b^2x^3y^2dy$. Es ist also das gesuchte Integrale: $ax^2ydx + b^2x^3y^2dy$.

Aufgabe 38.

Man verlangt das Integrale von:

$$ax^3y^2ddx + 3ay^2x^2dx^2 + (2ax^3y + bz^2)\,dxdy + bxz^2ddy + 2bxzdydz.$$

Auflösung.

Wenn wir, um die Rechnung abzukürzen, den binomischen Lehrsatz gebrauchen, so ist $P = ax^3y^2ddx$;

Q

$Q = \frac{bz^2dxdy}{ax^3y^2ddx}$; oder nach §. 4. $Q = \frac{bz^2dy}{ax^2y^2dx}$; folglich

$P^m = ax^3y^2dx = A.$

$mAQ = \frac{1}{2}ax^3y^2dx . \frac{bz^2dy}{ax^2y^2dx} = bxz^2dy.$ Also das gesuchte Integrale $ax^3y^2dx + bxz^2dy.$

§. 16.

Es kann sich ereignen, daß das nach unserer Methode gefundene Integrale nicht das wahre ist, obgleich die gegebene Formel ein Integrale hat; in diesem Falle muß man nach bekannten Regeln jenen Faktor suchen, der das Differenzial integrabel macht.

Aufgabe 39.

Man verlangt das Integrale von:

$$ax^2yddx + 3ayxdx^2 + (2ax^2 + 2by^3)dxdy + bxy^3ddy + 4bxy^2dy^2.$$

Auflösung.

Nach dem binomischen Lehrsatz ist $P = ax^2yddx$;

$Q = \frac{2by^3dxdy}{ax^2yddx}$. oder nach §. 4. $Q = \frac{2by^2dy}{axdx}$, folglich:

$P^m = ax^2ydx = A.$

$mAQ = \frac{1}{2}ax^2ydx \cdot \frac{2by^2dy}{axdx} = bxy^3dy.$

Wenn dieses gefundene Integrale differenziret wird, so ergiebt sich:

$ax^2yddx + 2axydx^2 + ax^2dydx + by^3dxdy + bxy^3ddy + 3bxy^2dy^2$, welches von dem gegebenen Differenziale unterschieden ist. Sucht man nun nach den bekannten Regeln den Faktor, so wird man sehen, daß wenn man das gefundene Integrale mit xy vielfältiget, das Produkt $ax^3y^2dx + bx^2y^4dy$, das wahre Integrale angebe.

§. 17.

Ich glaube durch die angeführten Beyspiele hinlänglich gezeigt zu haben, wie genau meine Regel in allen Fällen das Integrale angiebt, und wie wenig Arbeit sie selbst dann erfodert, wenn die bisher üblichen Methoden durch unendliche Rechnungen die Geduld des unerschrockensten Geometers ermü-

den.

den. Es giebt aber doch Fälle, wo auch meine Methode zurück bleibt, und dieß sind vorzüglich jene, wo das Integrale theils algebraisch ist, theils durch Logarithmen ausgedrückt wird; es kann zwar seyn, daß sich auch diese durch Kunstgriffe nach meiner Regel behandeln lassen, mir aber ist es bisher noch nicht gelungen. Eben dieses gilt auch von den trigonometrischen Differenzialen, die ich in folgenden Aufgaben behandeln werde.

§. 18.

Anmerkung.

Die Methode nach welcher wir bisher alle Gattungen von Differenzialen behandelt haben, läßt sich nicht eben so unbedingt auch auf jene Formeln anwenden, welche das Differenziale einer trigonometrischen Linie enthalten. Die Ursache scheint zwar in dem oben angeführten §. 9. enthalten zu seyn, da sich aber doch einige Formeln nach unserer Methode wirklich integriren lassen, so dürfte es wohl nur auf einen mir noch unbekannten Kunstgriff ankommen, um sie alle integriren zu können. Die oben §. 5. gegebene Regel bleibt unverändert, anstatt der §. 4. gefundenen Ausdrücke für d^2x; d^3x &c. &c. müssen

jene gebraucht werden, welche die höhern Differenzialen von $\sin\varphi$; $\cos\varphi$ enthalten. Und hieher gehöret folgender Lehrsatz:

§. 19.

I. Lehrsatz.

$d.\sin\varphi = d\varphi\cos$	$d.\cos\varphi = -d\varphi\sin\varphi$
$dd.\sin\varphi = dd\varphi\cos - d\varphi^2\sin\varphi$	$dd.\cos\varphi = -dd\varphi\sin\varphi$
$ddd.\sin\varphi = ddd\varphi\cos\varphi - 3d\varphi.dd\varphi\sin\varphi - d\varphi^3\cos\varphi$	$ddd.\cos\varphi = -ddd\varphi\sin\varphi - 3d\varphi dd\varphi\cos\varphi + d\varphi^3\sin\varphi$

§. 20.

Da wie wir bereits §. 4. gezeigt haben $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$, so ist auch $\sin\varphi : d\varphi\cos\varphi = d\varphi\cos\varphi : dd\varphi\cos\varphi - d\varphi^2\sin\varphi$, folglich:

I. $$\frac{d\varphi^2\cos^2\varphi}{\sin\varphi} = dd\varphi\cos\varphi - d\varphi^2\sin\varphi$$

II. $$\left(\frac{dd\varphi\cos\varphi - d\varphi^2\sin\varphi}{d\varphi\cos\varphi}\right)^2 = ddd\varphi\cos\varphi - 3d\varphi dd\varphi\sin\varphi - d\varphi^3\cos\varphi;$$ eben so ist

III.

III. $\frac{d\varphi^2 \sin^2\varphi}{\cos\varphi} = -(dd\varphi \sin\varphi + d\varphi^2 \cos\varphi)$

IV. $\left(\frac{dd\varphi \sin\varphi + d\varphi^2 \cos\varphi}{-d\varphi \sin\varphi}\right)^2 = -d^3\varphi \sin\varphi - 3 d\varphi dd\varphi \cos\varphi$
$+ d\varphi^3 \sin\varphi.$

Aufgabe 40.

Man verlangt das Integrale von $- d\varphi \sin\varphi$.

Auflösung.

Nach dem §. 5. ist das Integrale $\frac{d\varphi^2 \sin^2\varnothing}{-d\varphi^2 \cos\varphi - dd\varphi \sin\varphi}$

aber nach §. 20. ist $-(d\varphi^2 \cos\varphi + dd\varphi \sin\varphi) = \frac{d\varphi^2 \sin^2\varphi}{\cos\varphi}$,

also wird das gesuchte Integrale: $\frac{d\varphi^2 \sin^2\varphi \cos\varphi}{d\varphi^2 \sin^2\varphi} = \cos\varphi$.

Aufgabe 41.

Man verlangt das Integrale: $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$.

Auflösung.

Nach §. 5. ist das Integrale: $\frac{d\varphi^2}{\cos^4\varphi}) : (dd\varphi\cos^2\varphi + 2d\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi)$

weil aber nach §. 20., $\frac{-d\varphi^2\cos^2\varphi}{\sin\varphi} = dd\varphi\cos\varphi + d\varphi^2\sin\varphi$,

$$dd\varphi\cos^2\varphi + 2d\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{-d\varphi^2\cos^3\varphi + d\varphi^2\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

folglich das Integrale: $\frac{d\varphi^2\sin\varphi}{\cos^4\varphi(-d\varphi^2\cos^3\varphi + d\varphi^2\sin^2\varphi\cos\varphi)}$

$$= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tang}\varphi.$$

Aufgabe 42.

Man verlangt das Integrale von $d\varphi\sin^3\varphi$.

Auflösung.

Nach unserer Regel wäre das Integrale:

$$\frac{d\varphi^2\sin^6\varphi}{dd\varphi\sin^3\varphi + 3d\varphi^2\sin^2\varphi\cos\varphi};$$ da aber nach §. 20.

$$dd\varphi\sin^3\varphi + 3d\varphi^2\sin^2\varphi\cos\varphi = \frac{-d\varphi^2\sin^4\varphi + 2d\varphi^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos\varphi},$$

so ist $\int d\varphi\sin^3\varphi = \frac{d\varphi^2\sin^6\varphi\,.\,\cos\varphi}{2d\varphi^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - d\varphi^2\sin^2\varphi} = \frac{\sin^4\varphi\cos\varphi}{2\cos^2\varphi - 1}$; dieses ist nun das wahre Integrale nicht, und es schien mir Anfangs, als wenn sich nach meiner Methode das Integrale nicht finden liesse. Um dessen überzeugt zu seyn, setzte ich $\cos\varphi = x$, also $\sin^2\varphi = (1 - x^2)$, und $-d\varphi\sin\varphi = dx$, folglich ist: $d\varphi\sin^3\varphi = -dx + x^2dx$, welches nach §. 5. und §. 4. behandelt, folgenden Ausdruck giebt: $\int d\varphi\sin^3\varphi =$ $\int(x^2dx - dx) = \frac{x^4dx^2}{x^2ddx + 2xdx^2} + \frac{dx^2}{-ddx} = \frac{x^4dx^2}{3xdx^2} - \frac{xdx^2}{dx^2} = \frac{1}{3}x^3 - x = \frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi = -\frac{1}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi$ $-\frac{2}{3}\cos\varphi$.

Da sich nun auf solche Art das wahre Integrale nach meiner Methode finden läßt, so überlasse ich den Liebhabern solcher Rechnungen die Ursachen zu untersuchen, warum meine Regel die Integralen der trigonometrischen Differenziaten nicht ebenfalls ohne vorhergehende Substitutionen giebt, und ob sie viel-

vielleicht im Stande sind, eines der nachfolgenden Integralien nach meiner Methode zu finden.

$$\int d\varphi \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^3\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^4\varphi = \frac{1}{4}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{3}{8}\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^5\varphi = \frac{1}{5}\sin\varphi\cos^4\varphi + \frac{4}{15}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{8}{15}\sin\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^6\varphi = \frac{1}{6}\sin\varphi\cos^5\varphi + \frac{5}{24}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{15}{48}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{15}{48}\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^7\varphi = \frac{1}{7}\sin\varphi\cos^6\varphi + \frac{6}{35}\sin\varphi\cos^4\varphi + \frac{8}{85}\sin\varphi\cos^2\varphi$$
$$+ \frac{16}{35}\sin\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^8\varphi = \frac{1}{8}\sin\varphi\cos^7\varphi + \frac{7}{48}\sin\varphi\cos^5\varphi + \frac{35}{192}\sin\varphi\cos^3\varphi$$
$$+ \frac{35}{123}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{35}{128}\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^9\varphi = \frac{1}{9}\sin\varphi\cos^8\varphi + \frac{8}{63}\sin\varphi\cos^6\varphi + \frac{16}{105}\sin\varphi\cos^4\varphi$$
$$+ \frac{64}{315}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{128}{315}\sin\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^{10}\varphi = \frac{1}{10}\sin\varphi\cos^9\varphi + \frac{9}{80}\sin\varphi\cos^7\varphi + \frac{21}{160}\sin\varphi\cos^5\varphi$$
$$+ \frac{3}{16}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{9}{32}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{9}{32}\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^{11}\varphi = \frac{1}{11}\sin\varphi\cos^{10}\varphi + \frac{10}{99}\sin\varphi\cos^8\varphi + \frac{80}{693}\sin\varphi\cos^6\varphi$$
$$+ \frac{32}{231}\sin\varphi\cos^4\varphi + \frac{128}{593}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{256}{693}\sin\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^{12}\varphi = \frac{1}{12}\sin\varphi\cos^{11}\varphi + \frac{11}{120}\sin\varphi\cos^9\varphi + \frac{33}{320}\sin\varphi\cos^7\varphi$$
$$+ \frac{77}{640}\sin\varphi\cos^5\varphi + \frac{11}{64}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{33}{128}\sin\varphi\cos\varphi.$$
$$+ \frac{33}{128}\varphi$$

∫

$$\int d\varphi \cos^{13}\varphi = \tfrac{1}{13}\sin\varphi\cos^{12}\varphi + \tfrac{12}{143}\sin\varphi\cos^{10}\varphi + \tfrac{40}{429}\sin\varphi\cos^{8}\varphi + \tfrac{320}{3003}\sin\varphi\cos^{6}\varphi + \tfrac{128}{1001}\sin\varphi\cos^{4}\varphi + \tfrac{512}{3003}\sin\varphi\cos^{2}\varphi + \tfrac{1024}{3003}\sin\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^{14}\varphi = \tfrac{1}{14}\sin\varphi\cos^{13}\varphi + \tfrac{13}{168}\sin\varphi\cos^{11}\varphi + \tfrac{143}{1680}\sin\varphi\cos^{9}\varphi + \tfrac{429}{4480}\sin\varphi\cos^{7}\varphi + \tfrac{1001}{8960}\sin\varphi\cos^{5}\varphi + \tfrac{143}{896}\sin\varphi\cos^{3}\varphi + \tfrac{429}{1792}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{429}{1792}\varphi$$

$$\int d\varphi \cos^{15}\varphi = \tfrac{1}{15}\sin\varphi\cos^{14}\varphi + \tfrac{14}{195}\sin\varphi\cos^{12}\varphi + \tfrac{56}{715}\sin\varphi\cos^{10}\varphi + \tfrac{112}{1287}\sin\varphi\cos^{8}\varphi + \tfrac{4480}{15.3003}\sin\varphi\cos^{6}\varphi + \tfrac{1792}{15.1001}\sin\varphi\cos^{4}\varphi + \tfrac{7168}{15.3003}\sin\varphi\cos^{2}\varphi + \tfrac{14.1024}{15.3003}\sin\varphi.$$

In jenen Fällen wo die Potenz von $\cos\varphi$ gerade ist, läßt sich das Integrale nach der Methode des §. 5. finden, wäre aber die Potenz eine ungerade Zahl, so würde das Integrale wegen dem darinn begriffenen Bogen φ nicht können bestimmt werden, und nach der Regel des §. 18. bin ich wenigstens nicht im Stande für einen von beyden Fällen das Integrale zu finden.

§. 22.

Es wäre nun nichts mehr übrig, als daß ich die Anwendung meiner Regel auf Differenzialgleichungen des ersten und der höhern Grade zeigte; da aber dieses mich verleiten

könnte

könnte weitläuftiger zu werden, als es die Gränzen einer kleinen Abhandlung erlauben, so muß ich die weitere Ausführung auf eine andere Gelegenheit verschieben. Vielleicht wird irgend ein Liebhaber durch meinen Versuch angeeifert diese Methode zu untersuchen und zu verbessern, oder auf eine Erfindung geleitet wodurch meine fernere Arbeit überflüssig würde: ich wünschte daß eines von beyden geschähe, weil sich in jedem Falle zeigen wird, ob ich etwas nützliches unternommen habe.

Anhang.

Symbolismus memorabilis Calculi Algebraïci & Infinitesimalis, in comparatione potentiarum & differentiarum, & de Lege Homogeneorum Transcendentali.

Ut cujuslibet quantitatis facile est invenire potentiam; ita cujuslibet certa lege variantis possumus invenire differentiam, seu Elementum. Sed regressus a potentia ad radicem per extractionem, & regressus a differentia ad ter-

terminum per summationem, non semper in potestate est. Et uti impossibilitas extractionis in numeris rationalibus quæsitæ producit quantitates surdas; ita impossibilitas summationis in quantitatibus Algebraïcis quæsitæ, producit quantitates transcendentes, quarum consideratio-nem in Analysin jam olim induximus. Sane, ut sæpe quantitates rationales per modum radicis seu irrationaliter exhibentur, etsi ad formulam rationalem reduci possint; ita sæpe quantitates Algebraïcæ seu ordinariæ per modum transcendentium exhibentur, etsi eas ad formulam ordinariam reducere liceat. Itaque multum interest inter *quantitates* & *formulam*.

Sed arcanior quædam subest inter Potentias & Differentias Analogia, quam hoc loco exponere operæ pretium erit. Et primum potentias binomii (seu summæ nominum duorum) comparabimus cum differentiis rectanguli (seu facti ex Factoribus bini) & deinde (cum analogia perpetua fit) breviter dabimus communem legem, tam potentiæ ex multinomio quocunque, quam differentiæ facti ex factoribus quotcunque. Potentiæ autem pariter ac differentiæ habent suos exponentes, gradum potentiæ vel differentiæ indicantes. Itaque analogiæ clarioris causa, ut dx, ddx, d^3x significat differentiam primam, secundam,

ter-

tertiam; itt x, xx, x^3 exprimemus hoc loco per p^1x, p^2x, p^3x, id eſt per potentiam primam, ſecundam, tertiam; nempe ipſius x. Et $p^e\,[x+y]$ ſignificabit potentiam ipſius $x+y$, ſecundum exponendem e, uti $d^e\,[xy]$ differentiam ipſius xy ſignificat, itidem ſecundum exponentem e.

Sit ergo Binomium $x+y$ ejus potentia prima, ſi ſic loqui licet, vel gradus ſi malis, ſeu quæ exponentem habet 1, eſt ipſa quantitas ſeu radix, ſeu ipſum Binomium $x+y$. Atque adeo $p^1(x+y) = x+y$, ſed potentia ſecunda ſeu quadratum ipſius $x+y$, ſive $p^2(x+y)$ erit $= 1xx + 2xy + 1yy$; & cubus ſeu potentia tertia ipſius $x+y$, ſive $p^3(x+y)$ eſt $= 1x^3 + 3x^2y + 3xyy + 1y^3$; & biquadratum ſeu potentia quarta ipſius $x+y$ ſive $p^4(x+y)$ eſt $= 1x^4 + 4x^3y + 6xxyy + 4xy^3 + 1y^4$. Et generaliter reperietur, potentiam quamcunque ab $x+y$ ſeu $p^e(x+y$ eſſe $1x^e$

$$+ \frac{e}{1}x^{e-1}y + \frac{c.e-l}{1.2}x^{e-2}y^2 + \frac{e.e-l.e-2}{1.2.3}x^{e-3}y^3 +$$

$$\frac{e.e-l.e-2.e-3}{1.2.3.4}x^{e-4}y^4$$ &c. ubi ſubtractione numerorum unitates creſcentium, veluti ſi $e = 3$, ſeu $e - 3 = 0$, evaneſcit terminus in quo eſt $e - 3$, & omnes

eum sequentes. Ita cum sit $e = 3$, fiet $p^3(x + y = 1x^3$
$+ \frac{3}{1} x^2y + \frac{3 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 2} xy^2 + \frac{3 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3$
seu $1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 = 1p^3xp^0y + 3p^2xp^1y$
$+ 3p^1xp^2y + 1p^0xp^3y$.

Ubi notandum x^0, vel y^0, sive p^0x, p^0y, vel aliam cujusque quantitatis potentiam, cujus exponens evanescit seu sit o, abire in unitatem. Nam si ordine ponamus

Quantitatis progressionis Geometricæ	$\frac{1}{x^3}$,	$\frac{1}{xx}$,	$\frac{1}{x}$,	$\frac{1}{1}$,	x,	xx,	x^3,
Exponentes respondentes progressionis Arithmeticæ erunt.	-3,	-2,	-1,	1,	2,	3.	

Unde $p^0x = 1$ & $p^{-1}x = \frac{1}{x}$ vel $1 : x$, & $p^{-2}x = \frac{1}{xx}$ vel $1 : xx$. itaque formula generalis pro potestate Binomii sic scribi potest:

$$p^e(x + y) = 1\, p^exp^0y + \frac{1}{e}p^{e-1}xp^1y + \frac{e \cdot e - 1}{1 \cdot 2}p^{e-2}xp^2y$$
$$+ \frac{e \cdot e - l \cdot e - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}p^{e-3}xp^3y + \frac{e - e - 1 \cdot e - 2e - 3.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.}$$
$$p^{e-4}xp^4y + \&c.$$

Ve-

Veniamus jam ad differentiationes, idemque illic provenire ostendamus tantum pro $x+y$ ponendo xy, & pro p ponendo d. Primum ergo $d(xy) = ydx + xdy$. Ut olim docuimus, cum primum multis ab hinc annis calculum differentialem proponeremus: ex quo uno fundamento totus reliquus differentiarum calculus demonstrari potest. Ipsum autem fundamentum hoc, sic ostenditur: $d(xy)$ est differentia inter $(x+dx)(y+dy$ & xy, sive inter rectangulum proximum & propositum. Est autem $(x+dx)(y+dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$, unde si auferas xy fit $ydx + xdy + dxdy$, sed quia dx vel dy est incomparabiliter minus quam x vel y, etiam $dxdy$ erit incomparabiliter minor quam xdy & ydx; ideoque rejicitur, tandemque fiet $(x+dx)(y+dy) - xy = ydx + xdy$; jam $x = d^{\circ}x$ & $y = d^{\circ}y$, nempe ubi differentia nulla est & $d^{1}x$ est dx: vel $d^{1}y = dy$, ideo scribi poterit $d^{1}(xy) = d^{1}xd^{\circ}y + d^{\circ}xd^{1}y$; cæterum quæ evenire possent in signis variationes cum crescente x decrescit y, aut cum aliqua ex differentiis, velut dx aut dy fit quantitas negativa, nunc non explico: rem tractans generaliter, salva potestate cujusque signa in casibus specialibus, ubi opus est, immutandi.

Pergamus ad differentiationes ſecundas $dd(yx) = d(ydx + xdy) = d(ydx) + d(xdy)$. Jam $d(ydx) = yddx + dxdy$ ex calculo præcedente, nam pro dx ſcribamus z, erit $ddx = dz$, & fiet $d(ydx) = d(yz) =$ [per calculum præcedentem] $ydz + zdy = yddx + dxdy$. Et pari jure fiet $d(xdy) = dxdy + xddy$. Itaque colligendo, fiet $dd(xy) = yddx + 2dxdy + xddy$, prorſus ut quadratum ab $x + y$, dat $xx + 2xy + yy$, ſeu $d^2(xy) = d^2xd^0y + 2d^1xd^1y + d^2xd^2y$ prorſus ut $p^2(x+y) = p^2xp^0y + 2p^1xp^1y + p^0xp^2y$. Quæ analogia inter differentiationem & potentiationem ſervatur perpetuo, continuata potentiatione (ſeu Potentiæ ex citatione) & differentiatione. Nempe ut in nova potentiatione Binomii totum præcedens multiplicatur tam per y quam per x, & priore caſu p ipſius y, poſteriore p ipſius x, augetur unitate; ita in differentiando totum præcedens differentiatur tam ſecundum y quam ſecundum x, & priore caſu d ipius y, poſteriore autem d ipius x augetur unitate

Exempli gratia

Si $\left.\begin{matrix} p^1xp^0y \\ p^0xp^1p \end{matrix}\right\}$ multiplicemus per y fit $\left\{\begin{matrix} p^1xp^1y \\ p^0xp^2y \end{matrix}\right\}$ ſin illud multiplicemus per x fit p^2xp^0y p^1xp^1y

Et

Et ſimiliter.

Si $\left.\begin{matrix} d^{1}xd^{0}y \\ d^{0}xd^{1}y \end{matrix}\right\}$ differentiemus ſecundum y fit $\left\{\begin{matrix} d^{1}xd^{1}y \\ d^{0}xd^{2}y \end{matrix}\right\}$ ſin illud differentiemus ſecundum x fit $\begin{matrix} d^{2}xd^{0}y \\ d^{1}xd^{1}y. \end{matrix}$

Ex quo ſequitur porro $d^{3}(xy)$ eſſe $1d^{3}xd^{0}y + 3d^{2}xd^{1}y + 3d^{1}xd^{2}y + 1d^{0}xd^{3}y$, vel vulgari modo ſcribendi $yd^{3}x + 3ddxdy + 3dxddy + xd^{3}y$: Et generaliter, nt paulo ante potentiendo litteram p adhibuimus, ita nunc differentiando adhibita littera d, fore, $d^{e}(xy) = 1d^{e}xd^{0}y + \frac{e}{1}d^{e-1}xd^{1}y + \frac{e.e-1}{1.2.}d^{e-2}xd^{2}y + \frac{e.e-l.e-2}{1.2.3}d^{e-3}xd^{3}y +$ &c.

Quinimo etiam inter potentias multinomii, & differentias combinationis ſeu facti ex pluribus factoribus, eadem Analogia locum habebit, velut inter $d^{e}(xyz)$ differentiam ternionis, & $p^{e}(x+y+z)$ potentiam trimonii. Cum ſemper verum maneat. Exponentem tam ipſius p, quam ipſius d in formula ad altiorem potentiam elevanda, vel amplius differentianda, ſecundum quamlibet literam ſeparatim augeri unitate & ex omnibus provenientibus colligi formulam novam: Porro generalis olim a

me inventa eſt regula coëfficientium qua potentia polynomii cujusque exprimitur. Eadem ergo regula etiam ad numeros coëfficientes ejus formulæ valebit, quæ differentiationem facti ex pluribus factoribus exprimit.

Sunt autem numeri coëfficientes in potentiis nihil aliud, quam numeri tranſpoſitionum, quas recipiunt literæ in forma ſeu termino cui numerus præfigitur, veluti pro $p^3(x+y+z)$ ſeu pro cubo ab $x+y+z$ prodit:

$1x^3+3x^2y+6xyz$		ibi coëfficienteus omnium qualis x^2y, eſt 3 quia pro
$1y^3$	$3xy^2$	xxy ſcribi poteſt xxy, xyx, yxx
$1z^3$	$3x^2z$	Et coëfficiens omnium qualis xyz eſt 6.
	$3xz^2$	quia pro xyz ſcribi poteſt yxz, xyz, xzy, yzx, zxy, zyx
	$3y^2z$	ſed coëfficlens omnium qualis x^3 eſt, 1
	$3yz^2$	quia in xxx tranſpoſitio nihil variat.

Modum autem inveniendi numerum tranſpoſitionum formæ propoſitæ, alibi, commoda ſatis ratione, exhibuimus.

Ad analogiam autem cum differentiis ſervandam, cubus ſeu potentia tertia ab $x+y+z$ &c. ita ſcribetur

$$\left.\begin{array}{ll} 1p^3xp^0yp^0z + 3p^2xp^1yp^0z + 6p^1xp^1yp^1z \\ 1p^0xp^3yp^0z \quad 3p^1xp^2yp^2z \\ 1p^0xp^0yp3z \quad 3p^2xp^0yp^1z \\ \qquad\qquad\quad 3p^1xp^0yp^2z \\ \qquad\qquad\quad 3p^0xp^2yp^1z \\ \qquad\qquad\quad 3p^0xp^1yp^2z \end{array}\right\} \text{æquale eſt}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} p3(x+y+z) = 1x3 & + 3xxy & + 6xyz \\ \qquad\qquad\quad 1y^3 & \;\; 3xyy & \\ \qquad\qquad\quad 1z^3 & \;\; 3xxz & \\ & \;\; 3xzz & \\ & \;\; 3yyz & \\ & \;\; 3yzz & \end{array}\right.$$

Ergo ſimiliter differentia tertia ab xyz talis prodibit:

$$\left.\begin{array}{ll} 1d^3xd^0yd^0z + 3d^2xd^1yd^0z + 6d^1xd^1yd^1z \\ 1d^0xd^3yd^0z \quad 3d^1xd^2yd^0z \\ 1d^0xd^0yd^3z \quad 3d^2zd^0yd^1z \\ \qquad\qquad\quad 3d^1xd^0yd^2z \\ \qquad\qquad\quad 3d^0xd^2yd^1z \\ \qquad\qquad\quad 3d^0xd^1yd^2z \end{array}\right\} \text{æquale eſt}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} d3(xyz) = 1d^3x \cdot yz & + 3ddxdy \cdot z & + 6dxdydz \\ \quad 1xd^3y \cdot z & \quad 3dxddy \cdot z & \\ \quad 1xyd^3z & \quad 3ddx \cdot ydz & \\ & \quad 3dx \cdot yddz & \\ & \quad 3xddydz & \\ & \quad 3xdyddz & \end{array}\right.$$

Ubi patet, novo ſcribendi more apparere analogiam inter potentias & differentias, vulgato (nempe hic poſterius poſito) non apparere. Eaque analogia eousque porrigitur; ut tali ſcribendi more (quod mireris) etiam $p^{\circ}(x+y+z)$ & $d^{\circ}(xyz)$ ſibi reſpondeant, & veritati:

$$\text{Nam } p^{\circ}(x+y+z) = 1 = p^{\circ}xp^{\circ}yp^{\circ}z$$
$$\text{Et } d^{\circ}(xyz) = xyz = d^{\circ}xd^{\circ}yd^{\circ}z$$

Eadem etiam opera apparet quænam ſit *Lex homogeneorum tranſcendentalis*, quam vulgari modo ſcribendi differentias, non æque agnoſcas. Exempli gratia, novo hoc *characteriſticae* genere adhibito, apparebit $addx$ & $dxdx$ non tantum Algebraïce (dum utrobique binæ quantitates in ſe invicem ducuntur) ſed etiam tranſcendentaliter homogenias eſſe, & comparabiles inter ſe; quoniam illud ſcribi poteſt $d^{\circ}ad^{2}x$, hoc $d^{1}xd^{1}x$, & utrobique exponen-

ponentes differentiales conficiunt eamdem summam, nam $0 + 2 = 1 + 1$. Cæterum lex homogeneorum transcendentalis, vulgarem seu Algebraïcam præsupponit. Interim non omnes formæ transcendentes, licet homogeneæ inter se, æque per se aptæ sunt summationi. Exempli causa $adxddx$ absolute summabile est, sed $dxdxdx$ seu $p^3(d'x)$ homogeneum priori tam Algebraïce, quam transcendentaliter summabile non est, nisi quædam suppositio accedat.

II. Anhang.

Auszug eines Briefes des Herrn Johann Bernoulli an Herrn Leibnitz Acta Erudit: Anni 1721. pag. 199.

Eleganter observasti consensum inter numeros potestatum a binomio & differentiarum rectangulo; haud dubie aliquid arcani subest. Nondum satis vacavit examinare, an quid inde pro summationibus elici possit. Videtur tamen quantitatem propositam differentialem cujusvis

gradus integrari poſſe, eam primo differentiando *more conſueto*, & dein ſumendo tertiam proportionalem hujus novæ quantitatis differentialis ad differentialem propoſitam, conſideratis interim d, d^2, d^3, d^4 &c. tanquam quantitatibus Algebraicis, & non ut literis tantummodo characteriſticis; ſic e. g. tertia proportionalis d^3 ad dd erit d, & d^4 ad d^3 erit dd (ac ſi littera d quantitatem Algebraicam denotaret) in hunc finem eſto propoſita differentialis tertii gradus hæc $xd^3y + dxddy$ cujus integralis invenienda ſit: differentietur ea more ſolito & habebitur $xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$; poſito jam d^0x pro x, ſummatur ſecundum regulam meam tertia proportionalis ad $d^0xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$ propoſitam $d^0d^3y + dxddy$, quæ erit d^0xddy, hoc eſt $xddy$: dico itaque $xddy$ eſſe integralem quantitatis propoſitæ $xd^3y. + dxddy$, quod quidem ante calculum primo intuitu patebat; juvat tamen oſtendiſſe, quomodo per methodum eo perveniri poſſit. Nota, quod in hoc ſcrutinio literæ ipſæ, quæ alias indeterminatas denotant, non conſiderandæ ſunt ut tales, ſed duntaxat quatenus afficiunt vel diſtinguunt ipſas d, dd, d^3 &c. hoc modo quadratum ipſius d^3y hic non eſt d^3y^2 ſed d^6y; cubus ipſius d^4y non d^3y^3, ſed d^9y, idem puta de multiplicatione diviſione & extractione radicum, erit ſcilicet nova hac operandi ratione $d^2yd^3y = d^5y$; $\frac{d^7y}{d^5y} = ddy$; $\sqrt[3]{d^6y} = ddy$;

item

item $\frac{ddy}{ddy} = d^0y = y$: Hoc pacto $\frac{x}{x}$ non est $= 1$, sed $= \frac{d^0x}{d^0x} = d^0x = x$. Porro quoniam d^{m} idem quod $\int^m$, erit ex. gr. $\frac{d^4y}{d^5y} = d^{-1}y = \int y$, & $\frac{d^3y}{d^2x} = d^3yd^{-2}x = d^3y\int\int x$. Idem intelligendum si plures sint indeterminatæ x, y, z, &c. Accidit plerumque, sicuti prævideo, ut integrale quantitatis differentialis propositæ hoc modo inventum exprimatur per seriem, quando præsertim proposita differentialis sua natura non est integrabilis: Ex. gr. integranda sit $x^3dy + 2dxddy$; si differentietur, prodibit $xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy$: ergo tertia proportionalis hujus ad illam more nostro sumta erit $\frac{d^0xd^6y + 4dxd^5y + 4ddxd^4y}{d^0xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy}$, instituta jam divisione continua, incipiendo a primo denominatoris membro habebitur hæc series $d^0xddy + dydx - d^0yddx + d^{-1}yd^3x - d^{-2}yd^4x + d^{-3}yd^5x$ &c. hoc est, $xddy + dydx - yddx + \int yd^3x - \int\int yd^4x + \int^3 yd^5x$ &c., quæ proinde æqualis est $\int xd^5y + 2dxddy$. Alia invenitur series incipiendo divisionem ab ultimo membro, nimirum hæc, $2d^0xddy - d^{-1}xd^3y + d^{-2}xd^4y - d^{-3}xd^5y + d^{-4}xd^6y$ &c. hoc est: $2xddy - \int xd^3y + \int\int xd^4y - \int^3 xd^5y + \int^4 xd^6y$ &c., quæ proin priori seriei æqualis

est.

est. Alia adhuc abscondita hic latent; quæ autem eruere, & studiosius excoler e nunc non vacat &c.

„ In subsequente Epistola Mense Aug. 1695. data „ ad eundem Virum Illustrissimum hanc materiam conti„ nuavit his verbis “.

Memineris me seriem universalem invenisse (vid. Acta Lips. 1694. pag. 36.) pro quadraturis & rectificationibus per repetitam additionem & subtractionem quantitatum æqualium, quæ tibi non displicuit: Ecce nunc eandem seriem per novum meum integrandi modum repertam. Quærendum esto $\int ndz$; differentietur more consueto ndz, ut habeatur $nddz + dndz$, sive $d^{\circ}nddz + dndz$. Ad hoc proin & ad ndz seu $d^{\circ}nz$, ex præscripto novæ regulæ capiatur tertium proportionale, quod erit $\frac{d^{\circ}nddz}{d^{\circ}nddz + dndz} =$ (diviso numeratore & denominatore per d quod a z afficitur) $\frac{d^{\circ}ndz}{d^{\circ}ndz + dnd^{\circ}z}$. Facta nunc divisione ultima, inchoando a priore denominatoris termino prodibit $\int ndz = d^{\circ}nd^{0}z - dnd^{-1}z + d^{2}nd^{-2}z - d^{3}nd^{-3}z + \&c.$ hoc est: $nz - dn\int z + d^{2}n\int^{2}z - d^{3}n\int^{3}z + \&c.$, inchoata vero divisione a posteriore termino orietur $\int ndz = d^{-1}ndz -$

d

$d^{-2}nd^2z + d^3nd^3z - d^{4-}nd^4z +$ &c. hoc est $dz\int n - d^2z\int^2 n + d^3z\int^3 n - d^4z\int^4 n +$ &c. Quoniam vero (posita dz constante) $\int z$, $\int^2 z$, $\int^3 z$, $\int^4 z$ &c. æquantur ipsis $\frac{zz}{1.2dz}$, $\frac{z^3}{1.2.3dz}$, $\frac{z^4}{1.2.3.4dz}$, $\frac{z^5}{1.2.3.4.5dz}$ &c. prior series inventa $\int ndz = nz - dn\int z + d^2n\int^2 z - d^3n\int^3 z +$ &c., convertetur in hanc $\int ndz = nz - dn\frac{z^2}{1.2dz} + d^2n\frac{z^3}{1.2.3dz^2} - d^3n\frac{z^4}{1.2.3.4dz^3} +$ &c., quæ omnino eadem est, quam in Actis Lipf. loco supra citato exhibui. Quod si ponamus dn constantem, erunt $\int n$, $\int^2 n$, $\int^3 n$, $\int^4 n$ &c. $= \frac{nn}{1.2dn}$, $\frac{n^3}{1.2.3dn}$, $\frac{n^4}{1.2.3.4dn^3}$, $\frac{n^5}{1.2.3.4.5dn^4}$ &c. Hinc altera series $\int nd = dz\int n - d^2z\int^2 n + d^3z\int^3 n -$ &c. mutabitur in hanc: $\int ndz = dz\frac{nn}{1.2dn} - d^2z\frac{n^3}{1.2.3dn^2} + \frac{n^4}{1.2.3.4dn^3}$ &c. in qua perinde ut in præcedente applicando ad exempla dz, d^2z, d^3z, &c., destruuntur per dn, dn^2, dn^3 &c., ita ut proveniant quantitates pure Algebraicæ: quæ series itidem, ut in Actis docui, per iteratas additiones & subtractiones reperiri potest &c.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Paccassi, Johann von,

Abhandlung über eine neue Methode zu integriren

Wien 1785

Math.p. 397
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082531-5
VD18 90242513